10

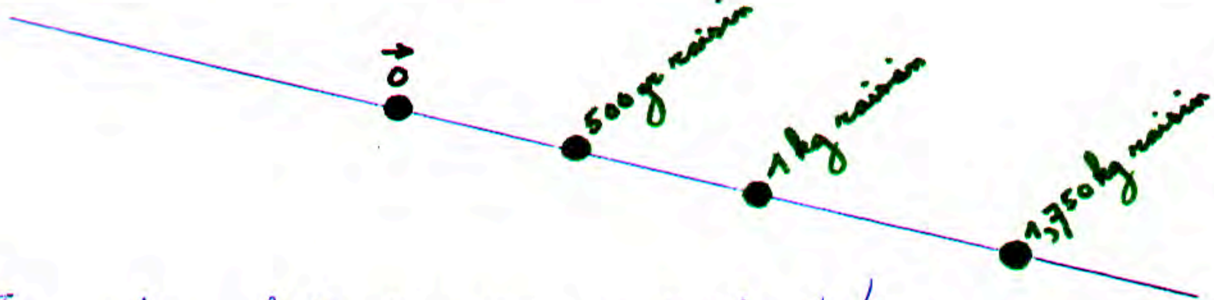
Equations des droites

1. Vectoriel d'achats

– Dans cette échoppe sur le bord de la route on ne vend qu'une sorte de tomates et une sorte de raisin.

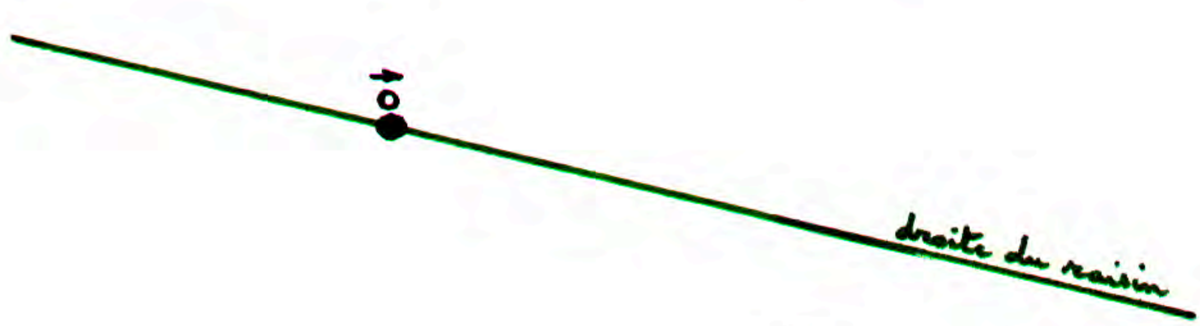
Madame Dupont y achète 500 gr de raisins.

– Veux-tu représenter 1 kg de raisins, 1,750 kg de raisins ?



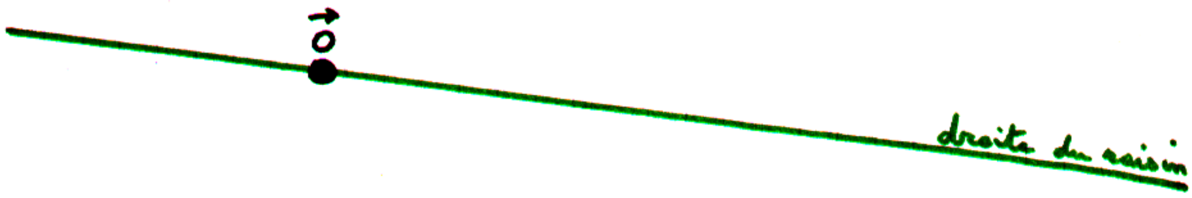
Tous les achats de raisins sont alignés !

– Ils appartiennent à "la droite du raisin".

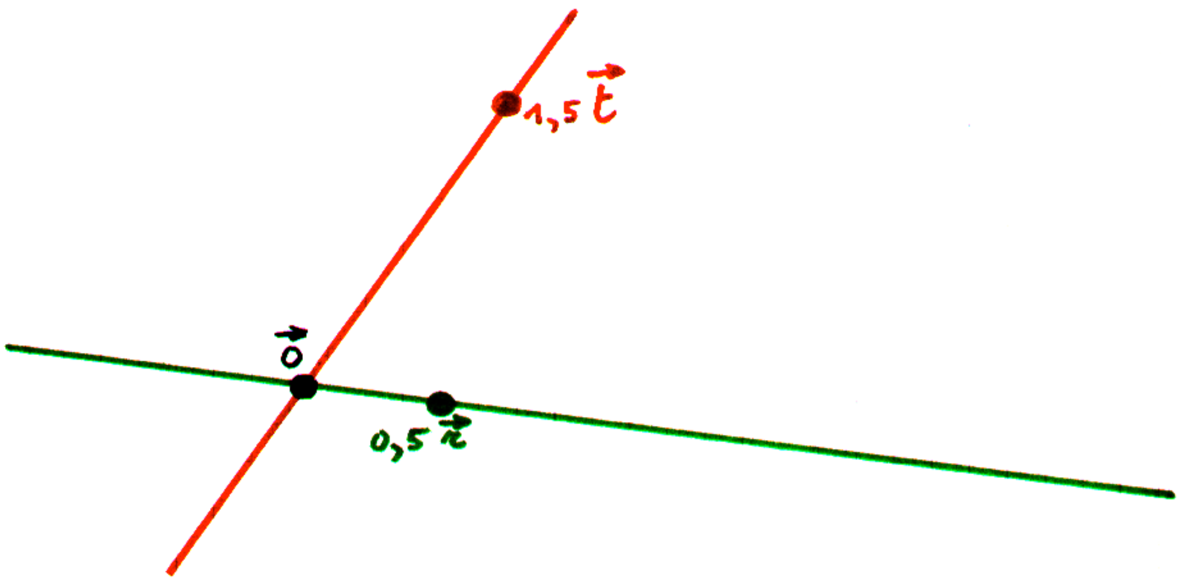


Madame Durand achète 1,5 kg de tomates.

– Voici son achat



– . . . et "la droite des tomates"!



Que désignent $\vec{r}$ et $\vec{t}$?

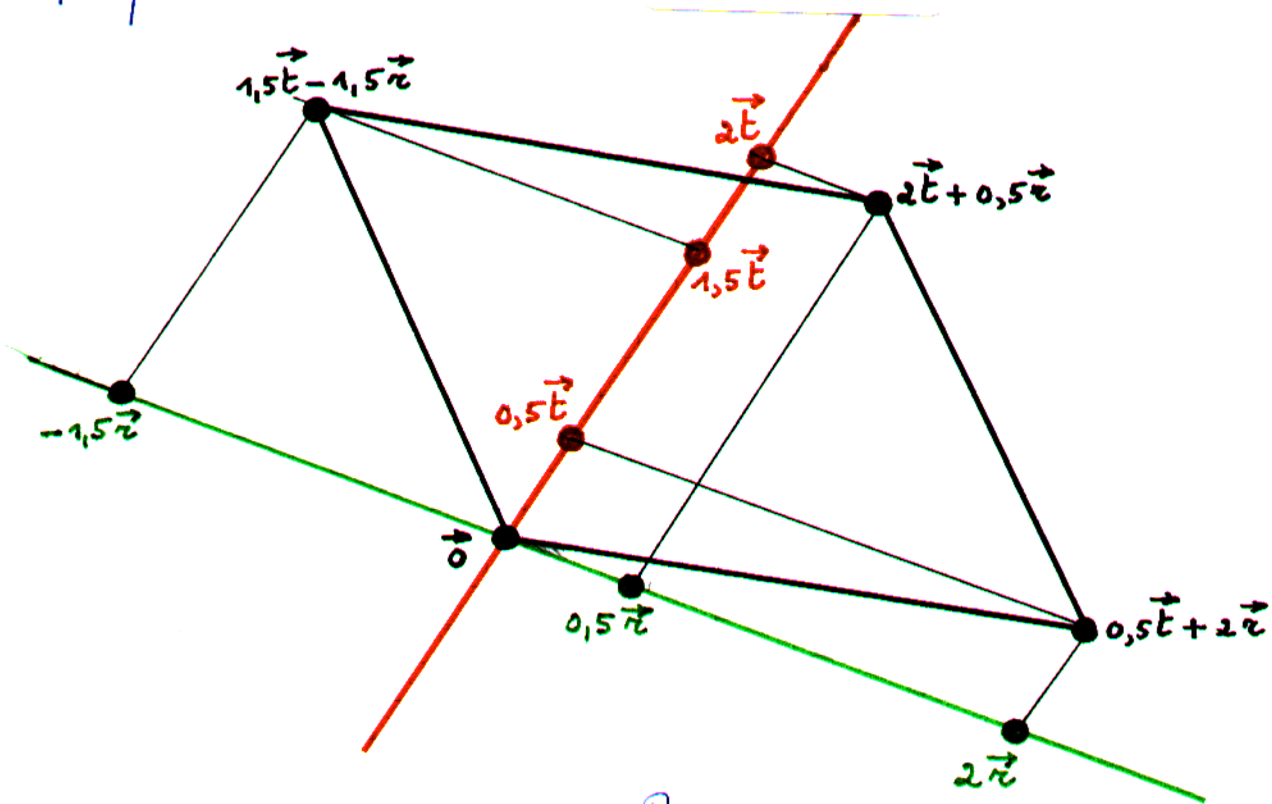
Madame Hettefretter, après avoir palpé longuement tomates et raisin, n'achète rien. Quel est le point représentatif de son achat ?

La maman du petit Léon lui a demandé d'acheter 2 kg de tomates et 500 gr de raisins. Marque le point

représentatif d'un tel achat.
Léon s'est trompé. Il a acheté 500 gr de tomates et 2 kg de raisins. Veux-tu représenter l'achat effectivement fait ?
Sa maman le renvoie.
Pour corriger son premier achat, il achète cette fois

1,5 kg tomates − 1,5 kg raisins.

Marque ce nouvel achat.



Veux-tu justifier ce dessin ?

$A = \{x\vec{r} + y\vec{t} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ idéalise l'ensemble des achats possibles au petit magasin de la même manière qu'un plan idéalise la surface du tableau.
Bien plus. Nous considérons ici les achats $x\vec{r} + y\vec{t}$, où x, y parcourt tout l'ensemble $\mathbb{R}$, y compris les négatifs !

1

Pour tous achats $\vec{x} = a\vec{r} + b\vec{t}$ et réel s

$$\vec{y} = c\vec{r} + d\vec{t}$$

$$\vec{x} + \vec{y} \triangleq (a+c)\vec{r} + (b+d)\vec{t}$$

$$s\vec{x} \triangleq sa.\vec{r} + sb.\vec{t}$$

L'addition des achats et la multiplication des achats par les réels érigent l'ensemble A en

<u>le vectoriel $\mathbb{R}, A, +$</u>

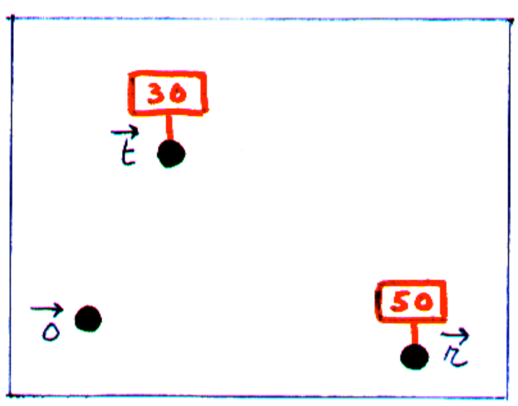
isomorphe à $\mathbb{R}, \Pi_0, +$ et $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +$

<u>Exercice</u>

Dans ce magasin, l'épicier n'admet que des achats positifs de sucre et de bananes. Sachant que le stock de bananes est de 45 kg et celui de sucre de 463 kg, veux-tu représenter graphiquement l'ensemble des achats de sucre et de bananes autorisés ?

2. Fonction prix

Voici le tarif affiché par cette petite échoppe :



où $\vec{r}$ désigne 1 kg de raisin et $\vec{t}$ désigne 1 kg de tomates

Nous écrivons : $p(\vec{r}) = 50$, $p(\vec{t}) = 30$

Calcule $p(\vec{r}+\vec{t})$

$p(0{,}750\,\vec{r})$

$p(0{,}5\,\vec{r}+2\vec{t})$

Selon les usages (idéalisés) du commerce tu peux calculer le prix de tout achat de tomates et de raisin dans ce magasin.

C'est ce qu'exprime le théorème

le tarif est fixé

1

En vectoriel d'achats

$\forall x, y \in \mathbb{R}\ ;\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in A : \quad p(x\vec{a}+y\vec{b}) = x.p(\vec{a}) + y.p(\vec{b})$

Autrement dit

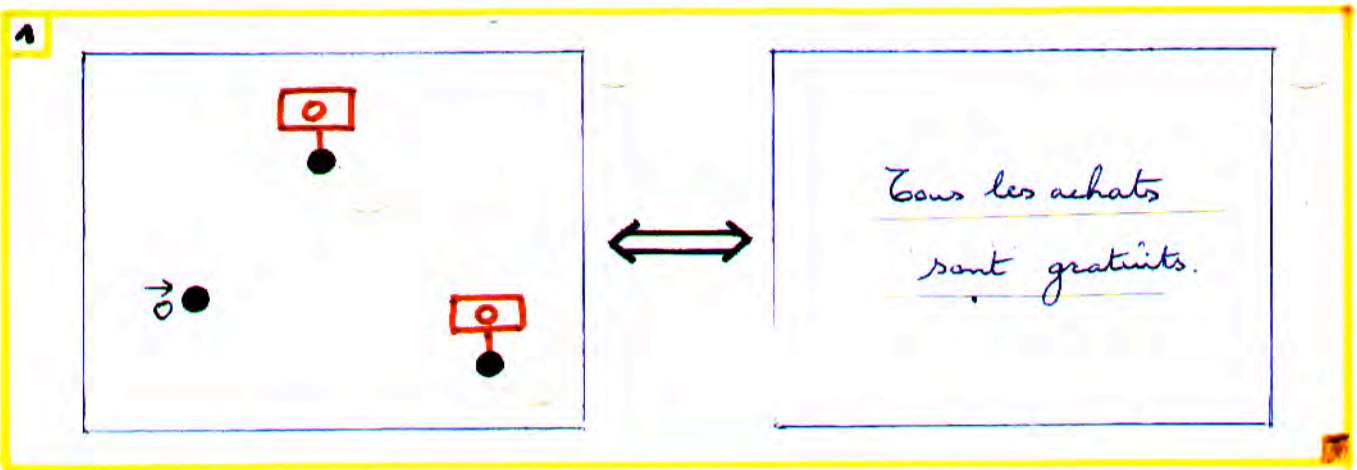
le tarif est fixé

1

En vectoriel d'achats

la fonction prix $p : A \to \mathbb{R} : \vec{a} \mapsto p(\vec{a})$ est linéaire.

Il est clair que



Exercices

Réfère-toi à la situation présentée au début de ce paragraphe.

1. Je veux dépenser exactement 120 F. Calcule quelques achats possibles de tomates et de raisin. Représente ces achats dans Π_0. Qu'observes-tu ?
2. Calcule plusieurs achats de prix nul. Représente-les dans Π_0. Qu'observes-tu ?

3. Droites équiprix.

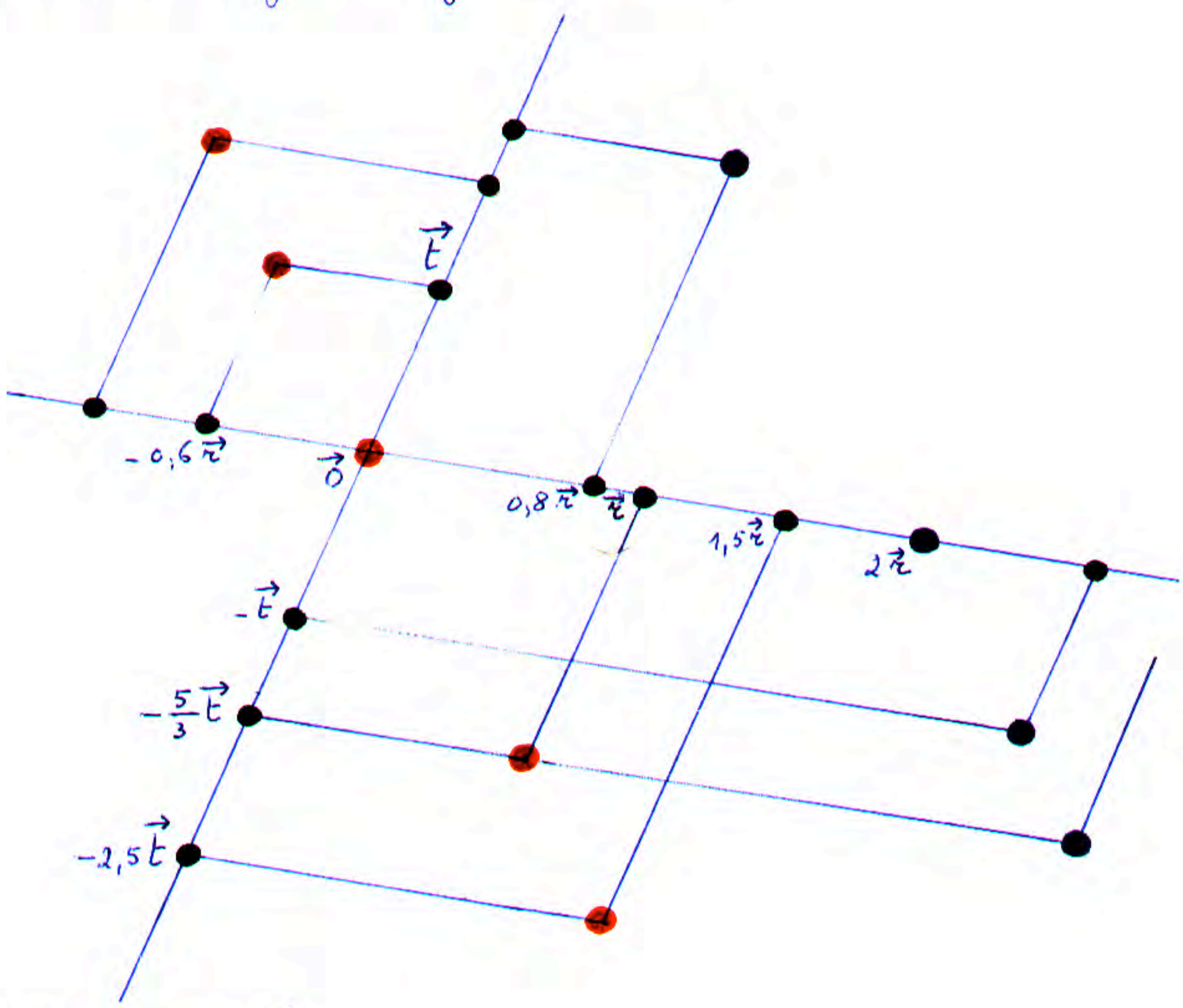
En cette petite échoppe, $p(\vec{r}) = 50$ et $p(\vec{t}) = 30$

Le prix de tout achat $\vec{a} = x\vec{r} + y\vec{t}$ s'écrit $p(\vec{a}) = 50x + 30y$ $\boxed{1}$

$\vec{a}$ est un achat de prix c ssi $50x + 30y = c$
$c \in \mathbb{R}$

Calcule plusieurs achats de prix nul ; représente-les dans Π_0 par des points rouges. Calcule plusieurs achats de 100 F ;

représente-les par des points bleus.

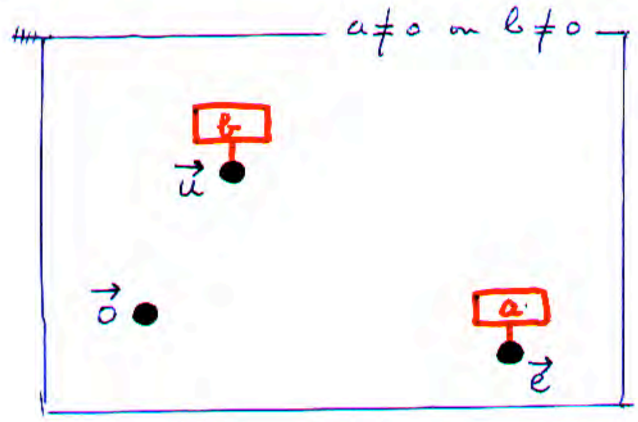


Qu'observes-tu ?

- Les achats (non nuls) de prix nul sont multiples l'un de l'autre. Ils appartiennent à la même droite vectorielle D_0
- Les achats de 100 F appartiennent à une même droite D, parallèle à D_0

La droite vectorielle D_0 est-elle l'ensemble des achats de prix nul ?
La droite D est-elle l'ensemble des achats de 100 F ?
Nous allons t'aider à répondre à ces questions.

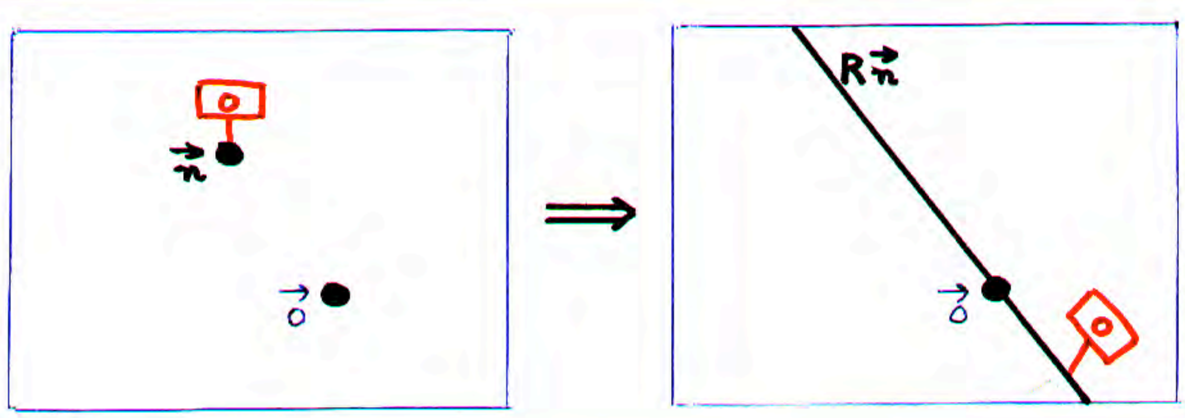
Voici un tarif non nul d'un vectorial d'achats :



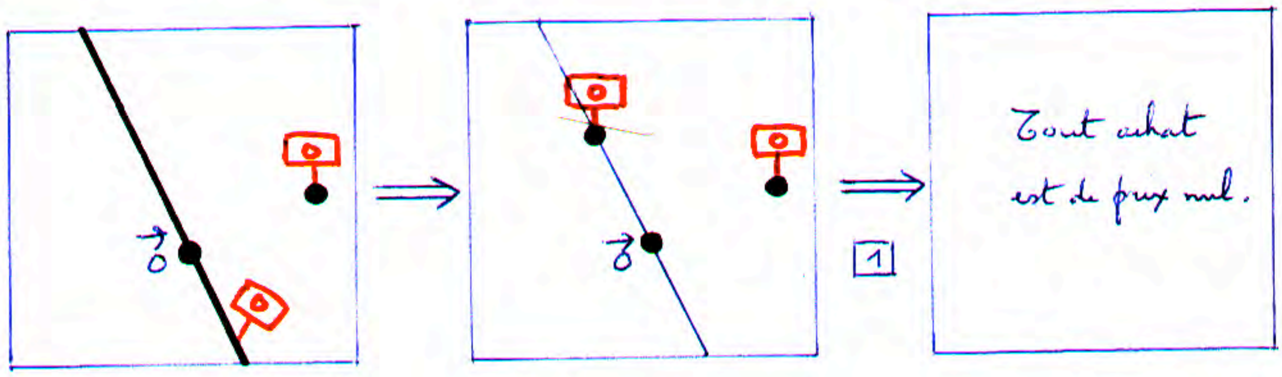
- Veux-tu calculer un achat non nul de prix nul ?
- $\vec{n} = b\vec{e} - a\vec{u}$
- Justifie !
- $p(\vec{n}) = b.p(\vec{e}) - a.p(\vec{u}) = b.a - a.b = 0$

Il existe un achat non nul de prix nul.

- Veux-tu calculer d'autres achats de prix nul ?
- $2\vec{n}$; $3\vec{n}$; $0,5\vec{n}$; $-\vec{n}$; $-1,25\vec{n}$
- D'une manière plus générale !
- $r\vec{n}$, pour tout $r \in \mathbb{R}$
- Justifie !



– $R\vec{n}$ est-il l'ensemble des achats gratuits ?



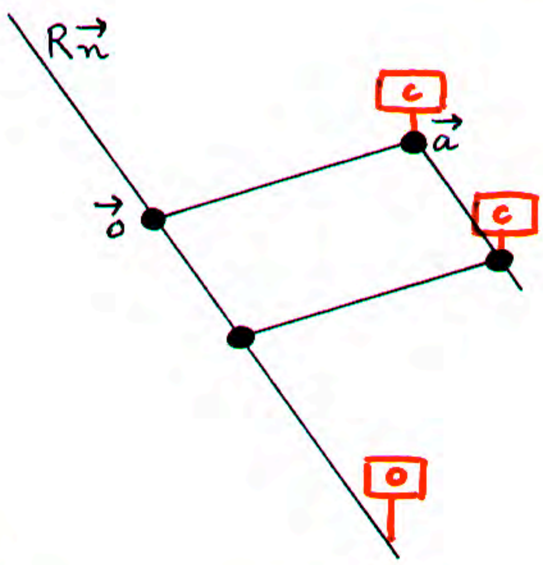
Contradiction !

tarif non nul

2 L'ensemble des achats de prix nul est une droite vectorielle.

– Voici un achat $\vec{a}$ de prix non nul c
Veux-tu construire un autre achat de prix c ?

–



– Justifie !

– Quel est l'ensemble des achats de prix c ?

$\vec{a}+\vec{x}$ est un achat de prix c

$\Updownarrow$

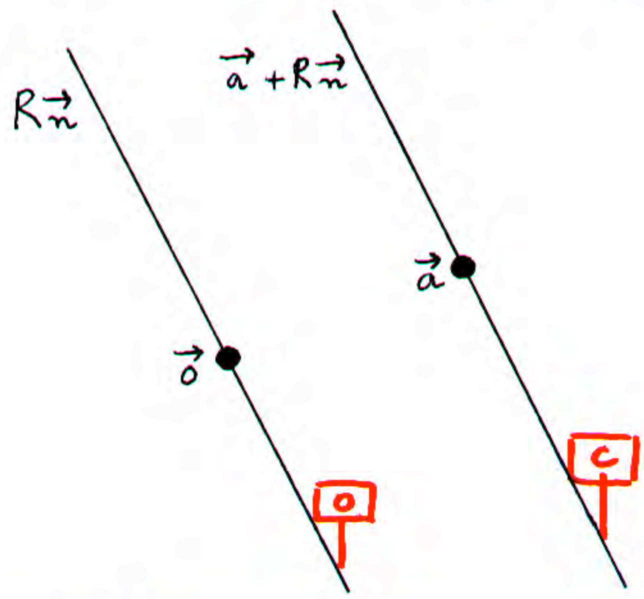
$\vec{x}$ est un achat de prix nul

S.J
10.10

L'ensemble des achats de prix nul est la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{n}$ $\boxed{2}$

Donc,

$$\text{l'ensemble des achats de prix } c = \{\vec{a} + \vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}\vec{n}\}$$
$$= \vec{a} + \mathbb{R}\vec{n}$$



$c \in \mathbb{R}$ — tarif non nul

3 L'ensemble des achats de prix c est une droite, parallèle à la droite des achats de prix nul.

– $\vec{a}$ est un achat de prix non nul a.
  Existe-t-il un achat de prix c, appartenant à $\mathbb{R}\vec{a}$? ($c \in \mathbb{R}$)

– Voici $r\vec{a} \in \mathbb{R}\vec{a}$

$$p(r\vec{a}) = c$$
$$\Updownarrow$$
$$r \cdot p(\vec{a}) = c$$
$$\Updownarrow$$
$$r = c \cdot a^{-1}$$

pas d'entrave

4
<u>Si</u> $\vec{a}$ est un achat de prix non nul et $c \in \mathbb{R}$
<u>Alors</u> $\mathbb{R}\vec{a}$ comprend un seul achat de prix c

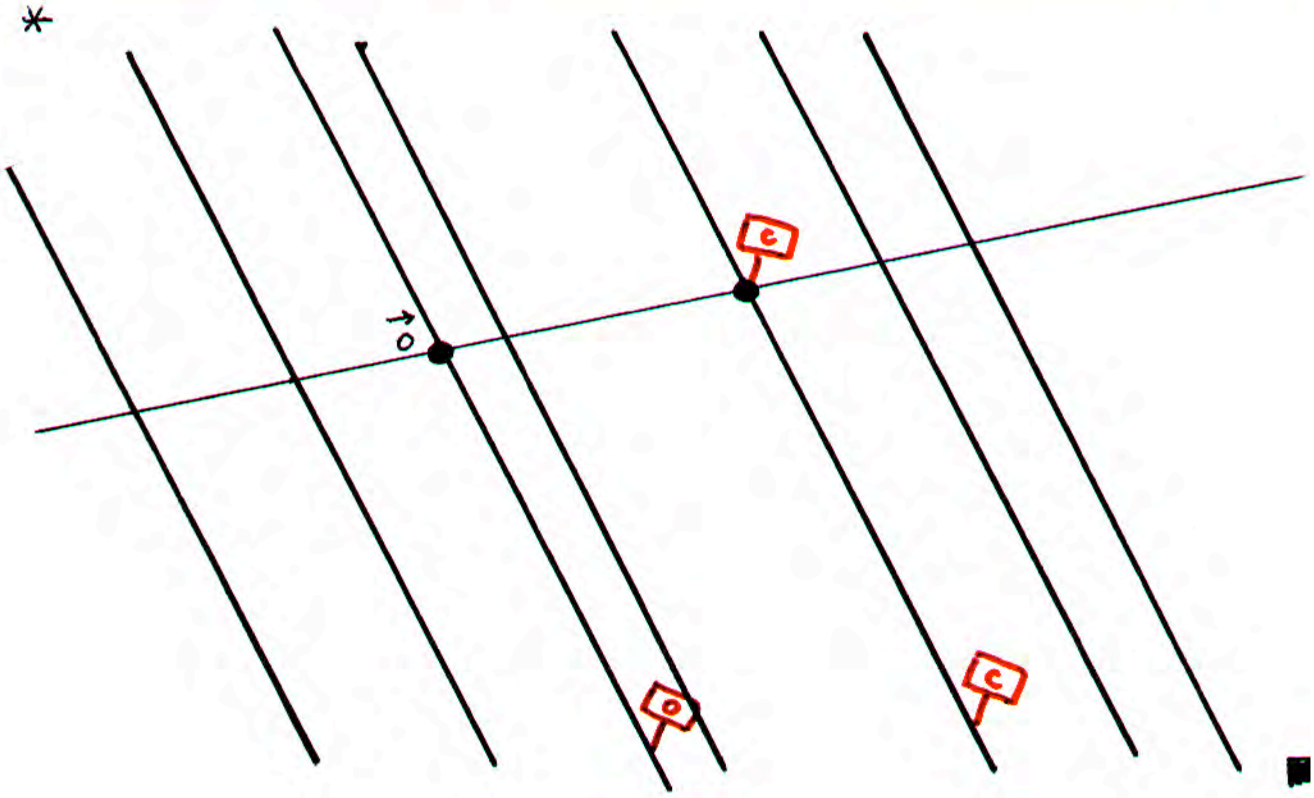
Autrement dit :

4
<u>Si</u> $\vec{a}$ est un achat de prix non nul
<u>Alors</u> $\mathbb{R}\vec{a} \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{x} \longmapsto$ prix de $\vec{x}$ est une bijection.

Des propositions 3 et 4 on déduit immédiatement le théorème

2 tarif non nul
L'ensemble des droites équiprix est une direction du plan.

*



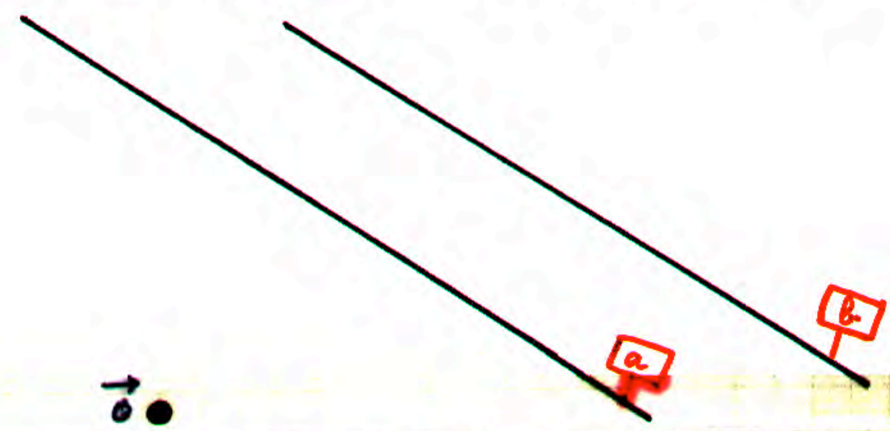
Exercices

Les prix sont exprimés en francs.

1.

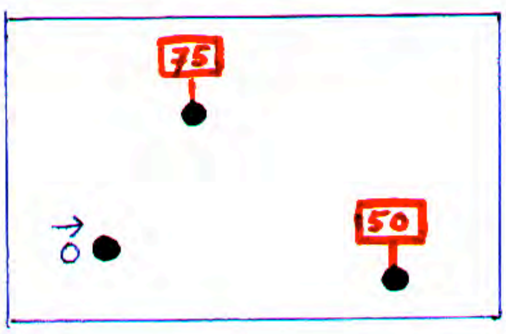
Trace l'ensemble des achats de 150 F, de -40 F, de 110 F

2.



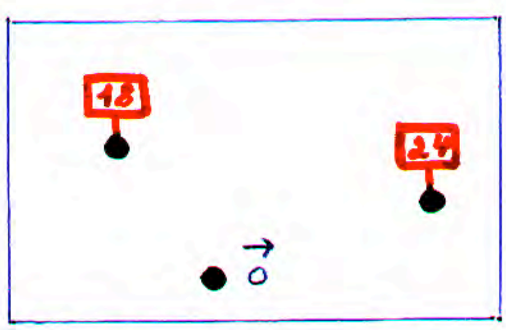
Trace l'ensemble des achats de $(a+b)$ francs,
de $(3a - 0{,}5b)$ francs.

3.



Ensemble des achats gratuits ?

4.

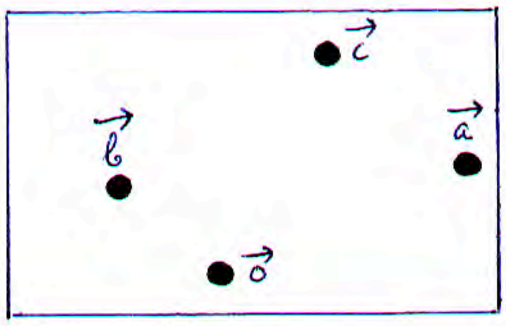


Ensemble des achats de 50 F ?

5. En tout vectoriel d'achats, pour toute fonction prix p

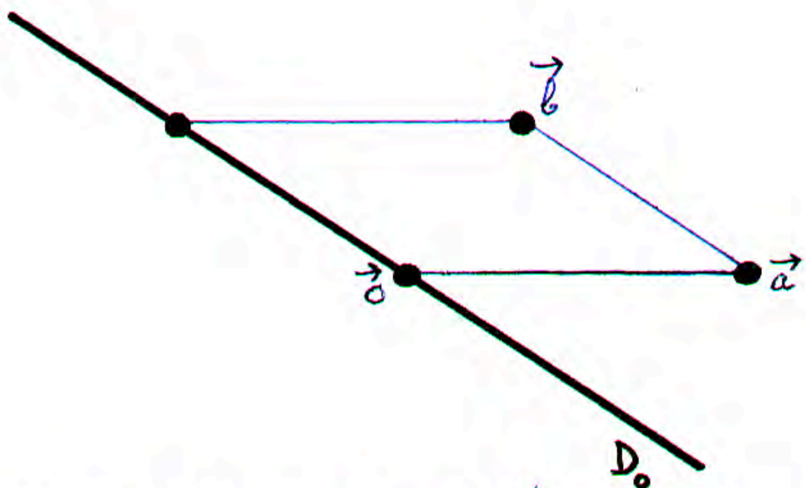
$\ker p$ = ensemble des achats gratuits

5.



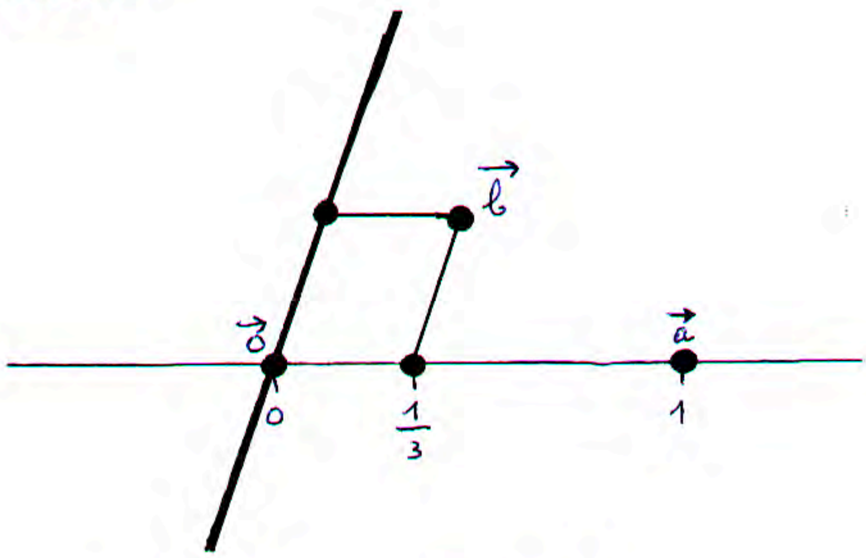
On t'informe : $p(\vec{a}) = p(\vec{b}) = p(\vec{c})$,
Que peux-tu conclure ?

6. En ce vectoriel d'achats



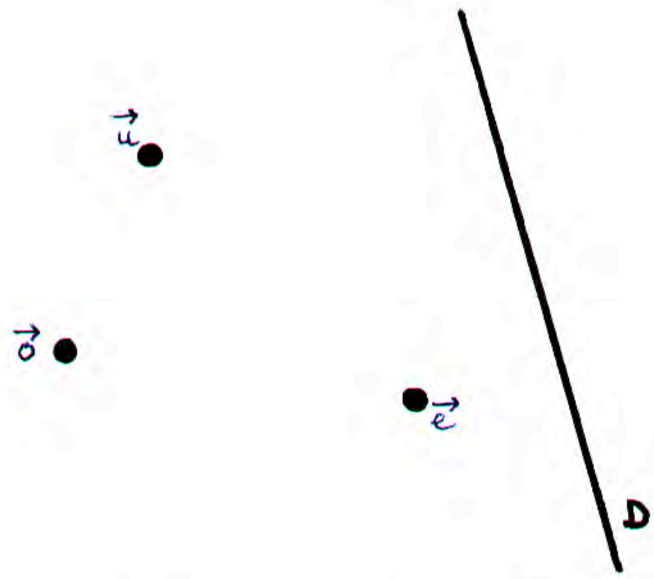
définit un tarif tel que D_0 soit l'ensemble des achats gratuits.

7. Même question :



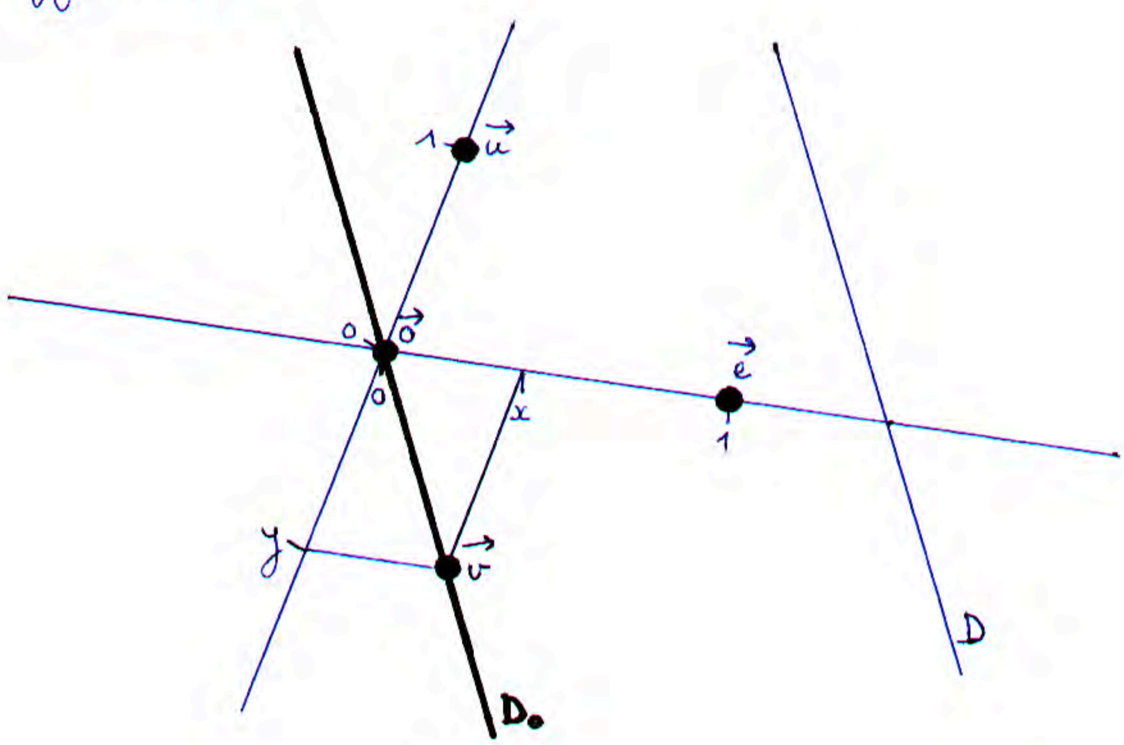
fin exercices Veux-tu présenter plusieurs tarifs ?

En Π_0, voici deux vecteurs non parallèles $\vec{e}$, $\vec{u}$ et une droite non vectorielle D



<u>Comment munir le vectoriel</u> $A = \{x\vec{e} + y\vec{u} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ <u>d'un tarif non nul tel que D soit équiprix</u> ?

D est sécante à oe ou à ou
Supposons les lettres choisies de manière telle que D $\nparallel$ oe
Sur la droite vectorielle D_0, parallèle à D, choisissons un achat $\vec{v}$, différent de $\vec{o}$



(x, y) est la coordonnée de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e}, \vec{u})$ ($x \neq 0$ ou $y \neq 0$)

En tarif

$p(\vec{e}) = y$

$p(\vec{u}) = -x$

$p(\vec{v}) = 0$

D_0 est la droite gratuite

D est équiprix

Nous venons de prouver

5

Pour toute droite D d'un vectoriel d'achats,
il existe un tarif rendant D équiprix.

4. Equations des droites

Voici le vectoriel d'achats A de base $(\vec{e}, \vec{u})$ muni du

tarif

$p(\vec{e}) = a$

$p(\vec{u}) = b$

$a \neq 0$ ou $b \neq 0$

$\forall \vec{x} \in A, \forall c \in \mathbb{R}$

$\vec{x} = x\vec{e} + y\vec{u}$ est un achat de prix c

$\underline{\underline{\text{ssi}}}$

$x . p(\vec{e}) + y . p(\vec{u}) = c$

$\underline{\underline{\text{ssi}}}$

$ax + by = c$

En vertu de $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$, et en identifiant chaque achat à sa coordonnée dans la base $(\vec{e}, \vec{u})$:

6

$a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$ est une droite vectorielle.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$ est une droite, parallèle à la précédente.

espace

Pour toute droite D,
il existe un tarif non nul $p(\vec{e}) = a$, $p(\vec{u}) = b$
rendant D équiprix, 5
c.à.d. tel que
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\} \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

7 Pour toute droite D de $\mathbb{R}^2$,
il existe des réels a, b, c $(a \neq 0$ ou $b \neq 0)$:
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$$

Notation — $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$$

s'abrège en

$$D \equiv ax + by = c$$

et se lit

"D est défini par l'équation $ax + by = c$"
ou "$ax + by = c$ est UNE équation de D"

On parle encore brièvement de "la droite $ax + by = c$"

espace

Le théorème 3 résume les propositions 6 et 7

$D \subset \mathbb{R}^2$

3

D est une droite

$\underset{=}{\text{ssi}}$

il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$) tels que

$D \equiv ax + by = c$

$ax + by = 0$ est la droite vectorielle parallèle à la droite $ax + by = c$

Exercices

1. $(u, v) \in D \equiv 2x + 3y = 4$ $\quad\underset{=}{\text{ssi}}\quad$ $2u + 3v = 4$

2. $(x_1, y_1) \in D \equiv ax + by = c$ $\quad\underset{=}{\text{ssi}}\quad$ $ax_1 + by_1 = c$

3. Le point $(5, -2)$ appartient-il à la droite $2x - 5y = 8$?

4. Calcule les coordonnées de nombreux points de la droite $x - 2y = 6$

5. La droite $ax + 2y = -3$ comprend le point $(-1, 2)$
   Calcule a

6. La droite $ax + by = 6$ comprend le point $(3, -5)$
   Valeurs de a, b ?

7. Une équation de la droite comprenant le point $(4, 7)$ et parallèle à $x - 2y = 0$?

8. **Si** $a = 0 = b$; $c \in \mathbb{R}_0$
   Alors $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\} =$
   $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\} =$

9. Quand dirons-nous que les équations

$$ax + by = c \quad \text{et} \quad a'x + b'y = c'$$

sont égales ?

$a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{gathered}(ax + by = c) \;\triangleq\; (a'x + b'y = c') \\ \underline{\underline{\text{ssi}}} \\ a = a',\ b = b',\ c = c'\end{gathered}}$$

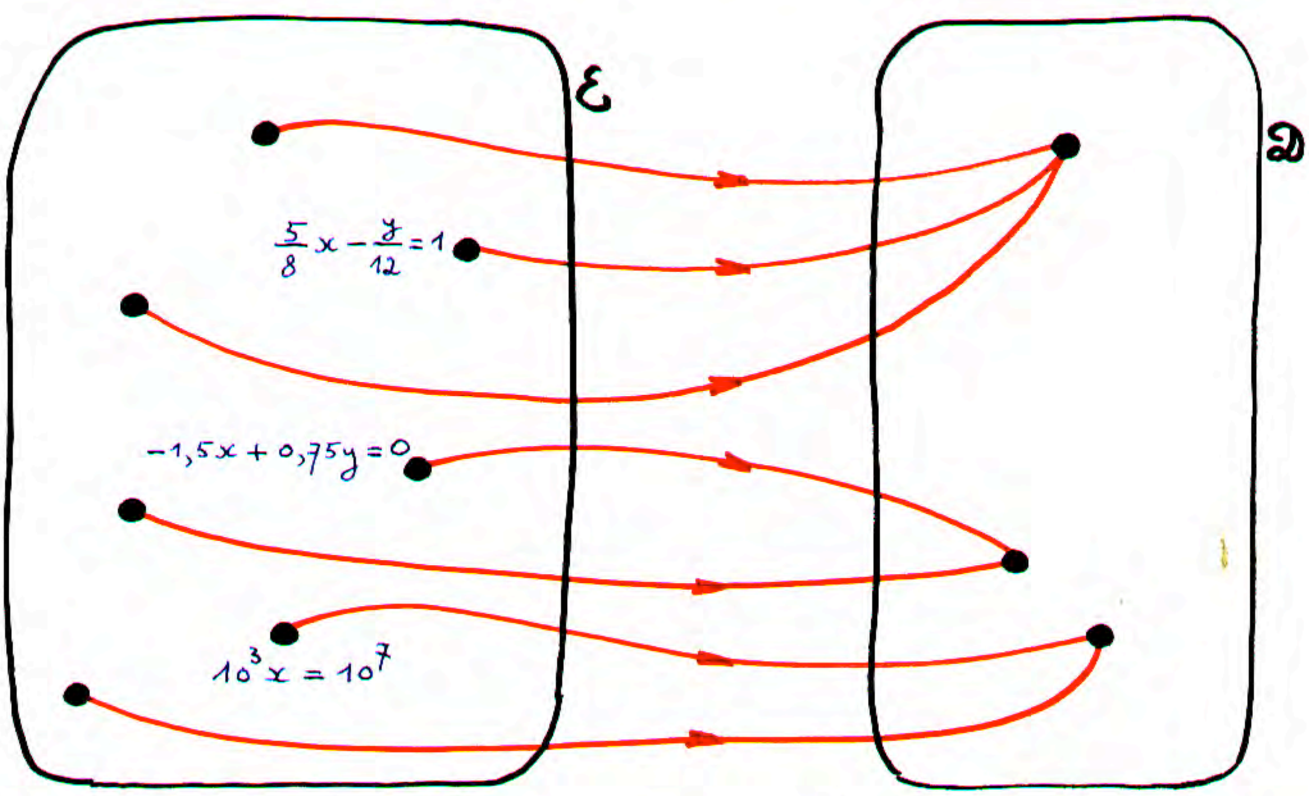
10. Voici $\quad D_1 \equiv \frac{1}{2}x - y = \frac{3}{4} \quad$ et $\quad D_2 \equiv 2x - 4y = 3$

$$\begin{gathered}(a, b) \in D_1 \\ \Updownarrow \\ \frac{1}{2}a - b = \frac{3}{4} \\ \Updownarrow \\ 2a - 4b = 3 \\ \Updownarrow \\ (a, b) \in D_2\end{gathered}$$

Que peux-tu conclure ?

11. $\mathfrak{D}$ désigne l'ensemble des droites du plan.

$$\mathcal{E} = \{ax + by = c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \,;\, a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0\}$$



Complète ce dessin en écrivant une équation en chacun des points de $\mathcal{E}$

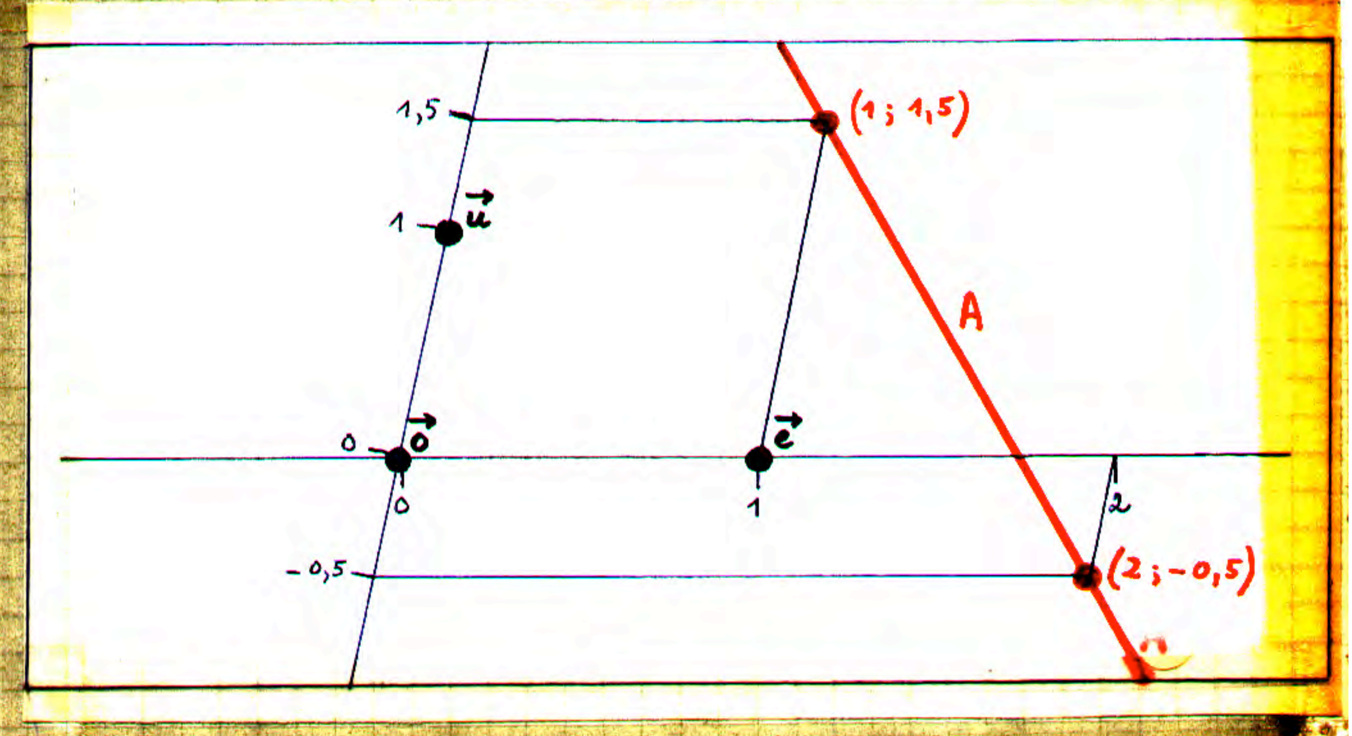
12. <u>Si</u> $D \in \mathcal{D}$ et $r \in R_0$

<u>Alors</u> $D \equiv ax + by = c$ <u>ssi</u> $D \equiv rax + rb.y = rc$

5. <u>Tracer la droite $D \equiv ax + by = c$</u>

Dans ce paragraphe, nous supposons toujours que le vectoriel Π_0 est muni d'une base. Les vecteurs (ou points) sont identifiés à leur coordonnée, dans cette base.

- Voici la droite $A \equiv 2x + y = 3,5$
  Combien de points suffit-il de déterminer pour pouvoir la tracer ?
- Deux points !
- Lesquels proposes-tu ?
- $(1\,;\,1,5)$ et $(2\,;\,-0,5)$



Il est clair que $(x, y) \in oe$ <u>ssi</u> $y = 0$

$(x, y) \in ou$ <u>ssi</u> $x = 0$

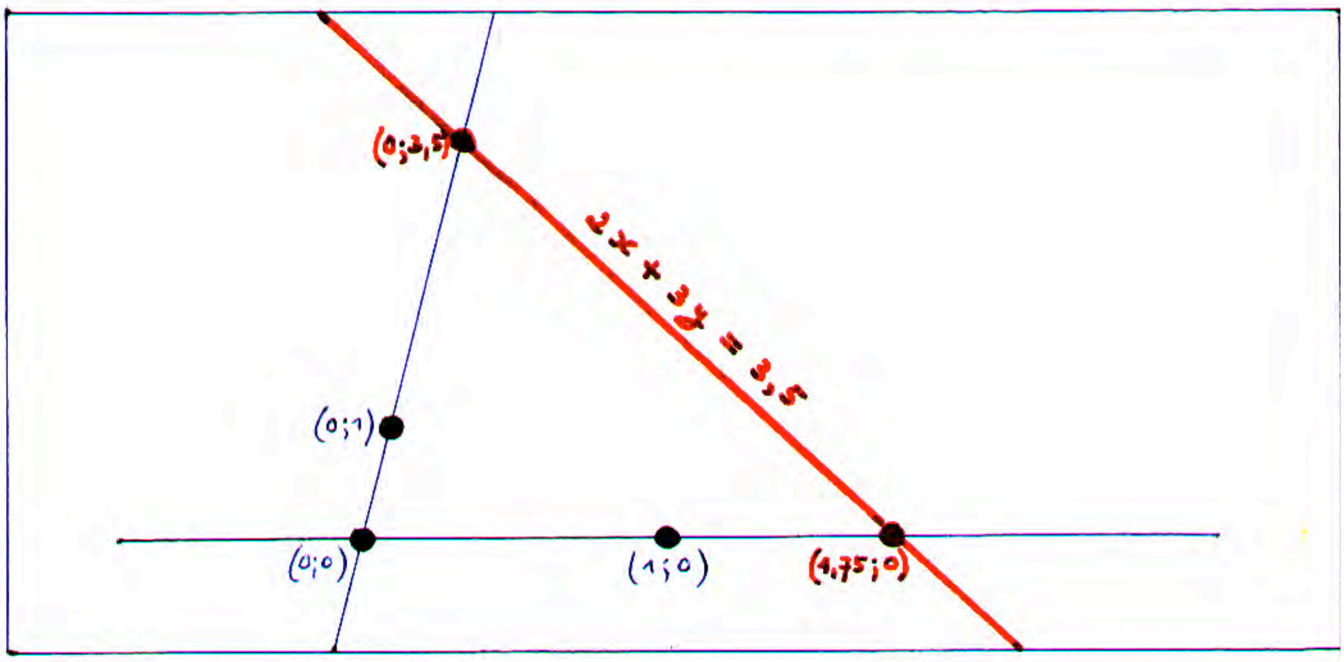
Les points des singletons

$$D \cap oe \quad , \quad D \cap ou$$

sont faciles à calculer.

Quand ces points existent, il est avantageux de les utiliser pour construire la droite D ... si les contraintes du dessin le permettent.

Construction économique de la droite $2x + y = 3{,}5$:



Exercices

π_0 est muni de la base $(\vec{e}, \vec{u})$

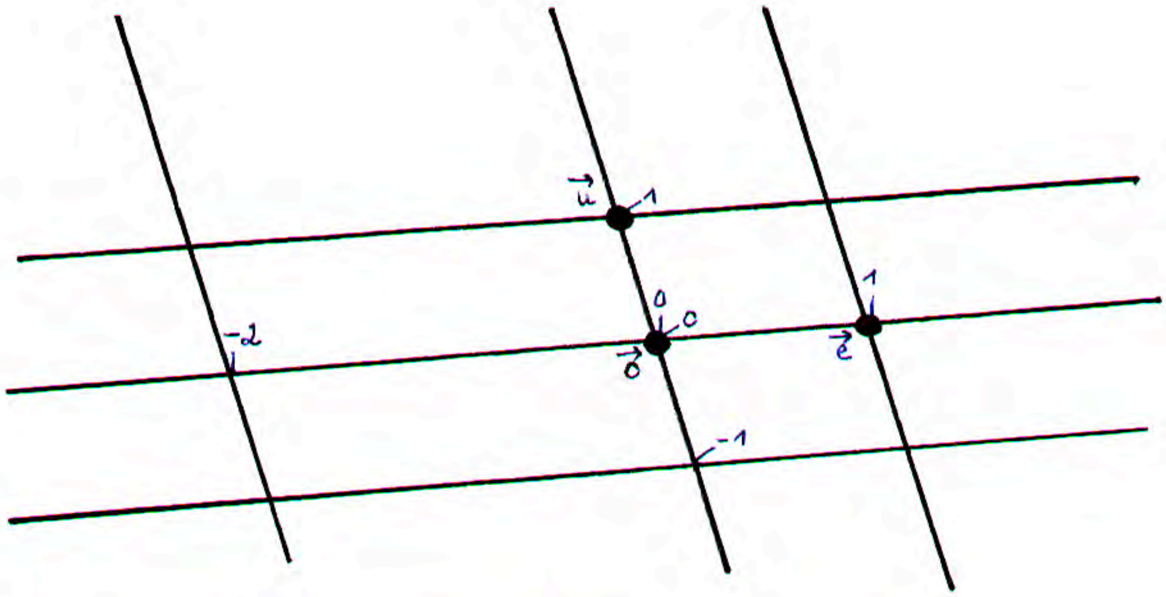
1. Trace les droites

$3x - 2y = 6$	$x - 5y + 2 = 0$
$x - y = -1$	$y = 2x$
$5x - y = 0$	$y = 2x + 1$
$3x - 2y = 0$	$y = -\frac{3}{2}x + 3$
$1{,}2x + 3{,}5y = -2$	$3y - 2x = 7y - 8x$
$6x - 4y = 0$	$4(2 - x) - 2(y - 1) = 0$

2. Trace la droite $y = 2$

3. Trace la droite $2x = -1$

4.

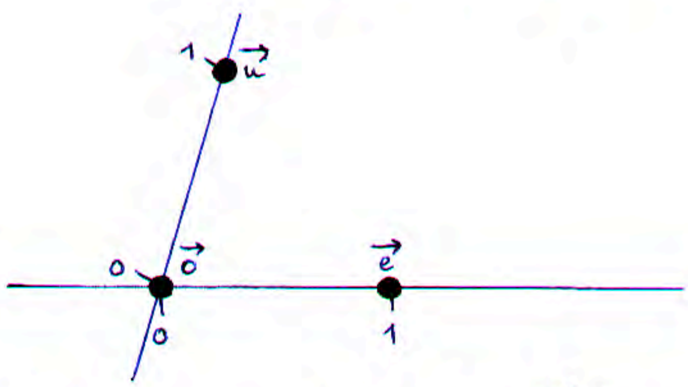


Trouve une équation de chacune des droites dessinées.

5. La droite $ax + by = c$ est parallèle à oe ssi $a = 0$

La droite $ax + by = c$ est parallèle à ou ssi $b = 0$

6.



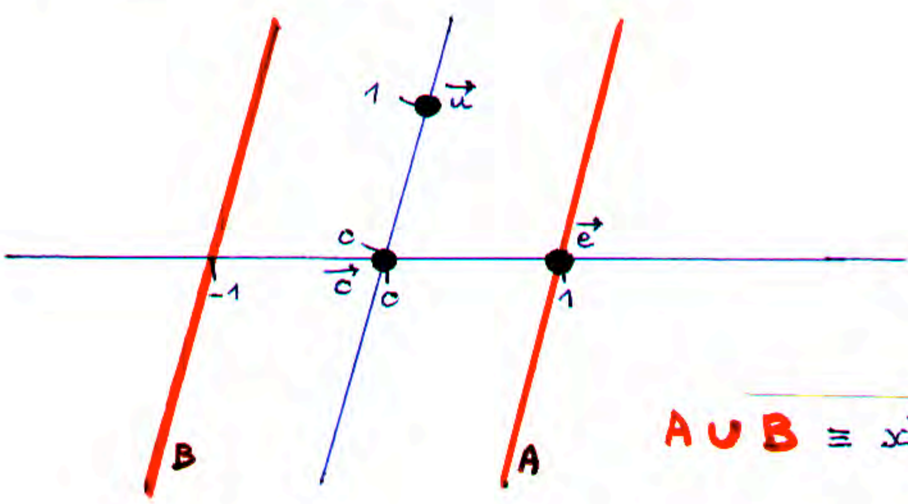
Les repères sont métriques.

Dessine en rouge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

Dessine en bleu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$

Qu'observes-tu ?

7.

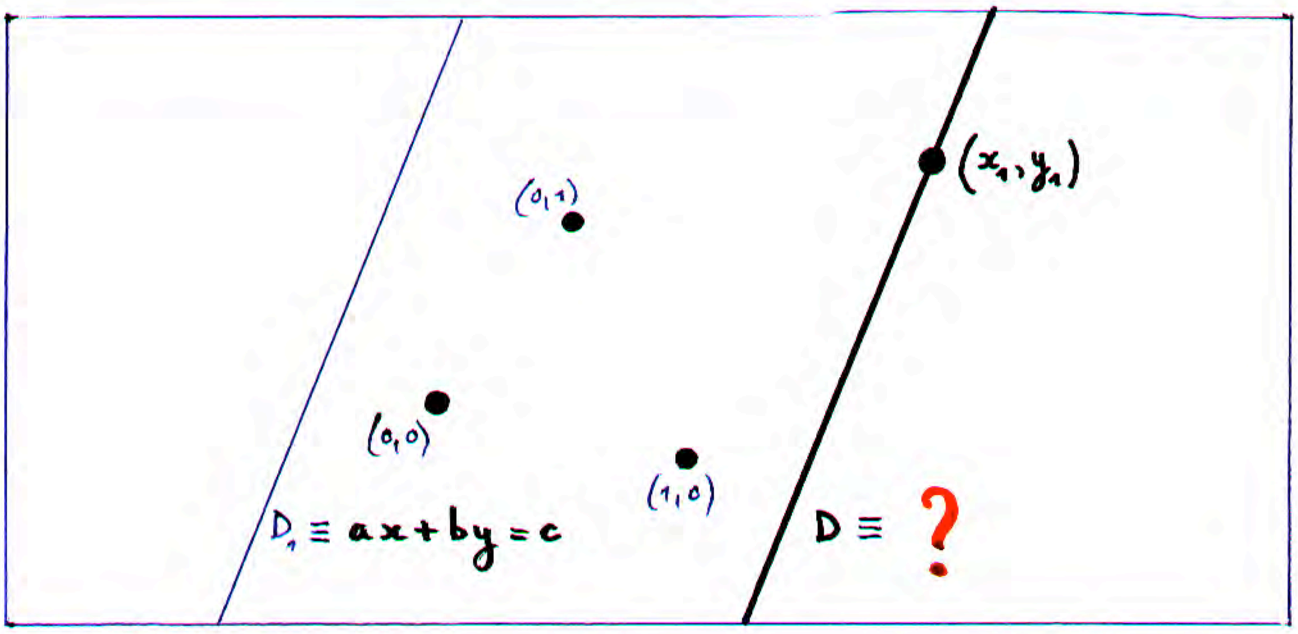


$A \cup B \equiv x^2 - 1 = 0$

6. Exercices

Π_0 est muni de la base $(\vec{e},\vec{u})$

8.



Solution

Toute droite parallèle à $\quad ax+by=c$

s'écrit $\quad ax+by=\ldots$

La parallèle à $ax+by=c$ qui comprend (x_1,y_1) est donc

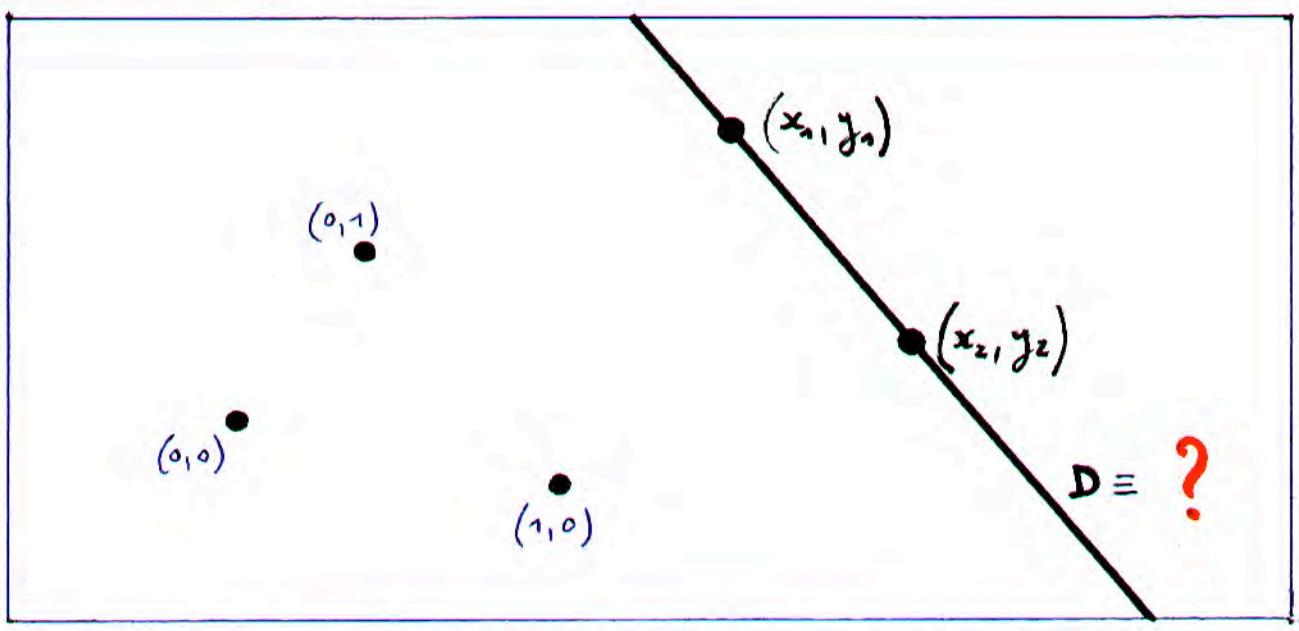
$$ax+by=ax_1+by_1$$

$$D \equiv ax+by=ax_1+by_1$$

9. Equation de la droite comprenant $(2,0)$ et parallèle à $2x+3y=1$?

10. Equation à coefficients entiers de la droite comprenant $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ et parallèle à $3x-4y-5=0$?

11.



$$D \equiv (y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$$

Vérifie !

12. Donne une équation de la droite qui comprend les points

a) $(2;3)$ et $(4;1)$

b) $(-3;5)$ et $(2;-2)$

c) $(3;4)$ et $(-9;-12)$

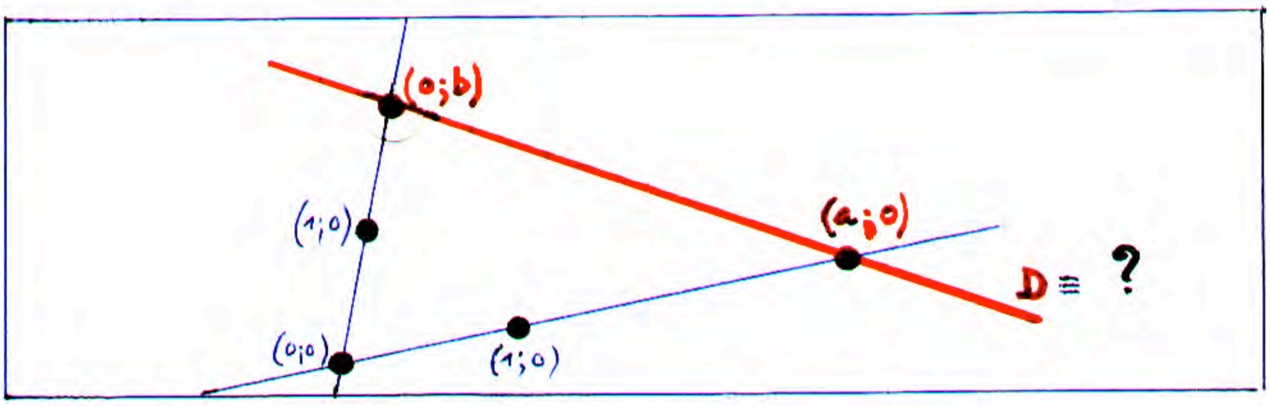
d) $(3;1)$ et $(3;2)$

e) $(1;0)$ et $(0;1)$

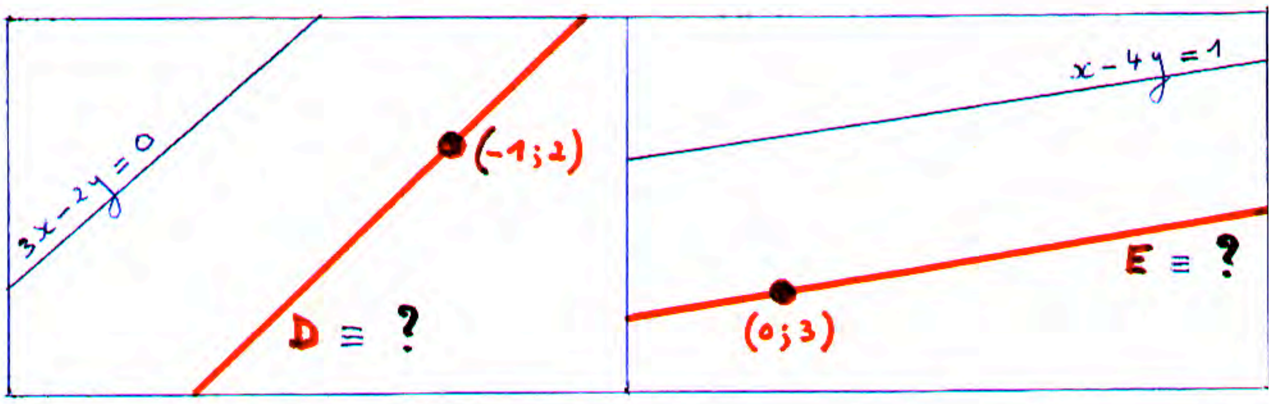
f) $(4,2;0)$ et $(0;-5,5)$

g) $(0,0)$ et $(2;\sqrt{2})$

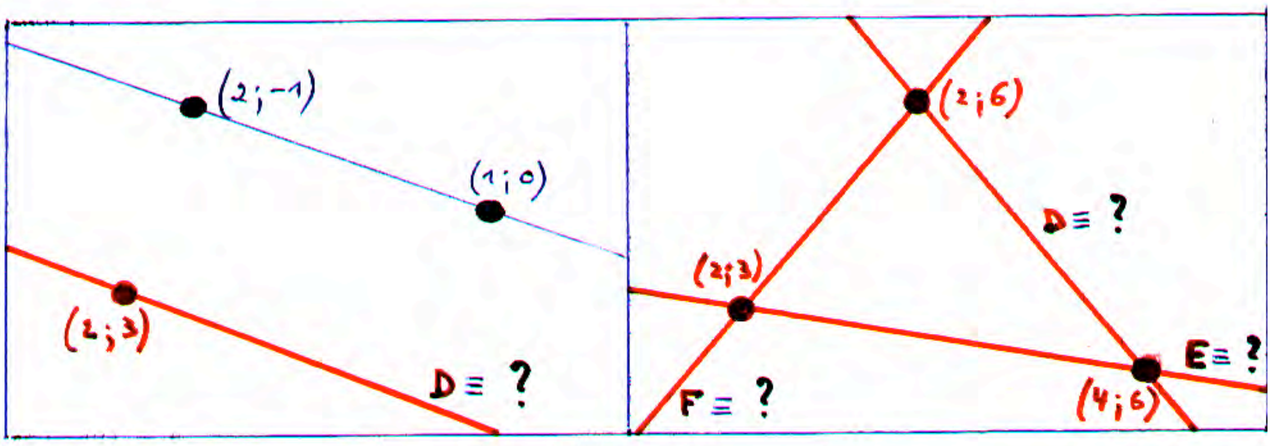
13.



14.

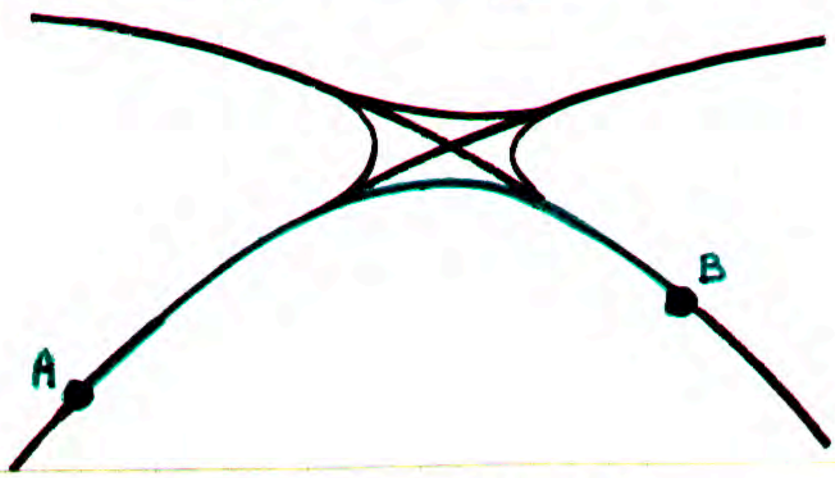


15.



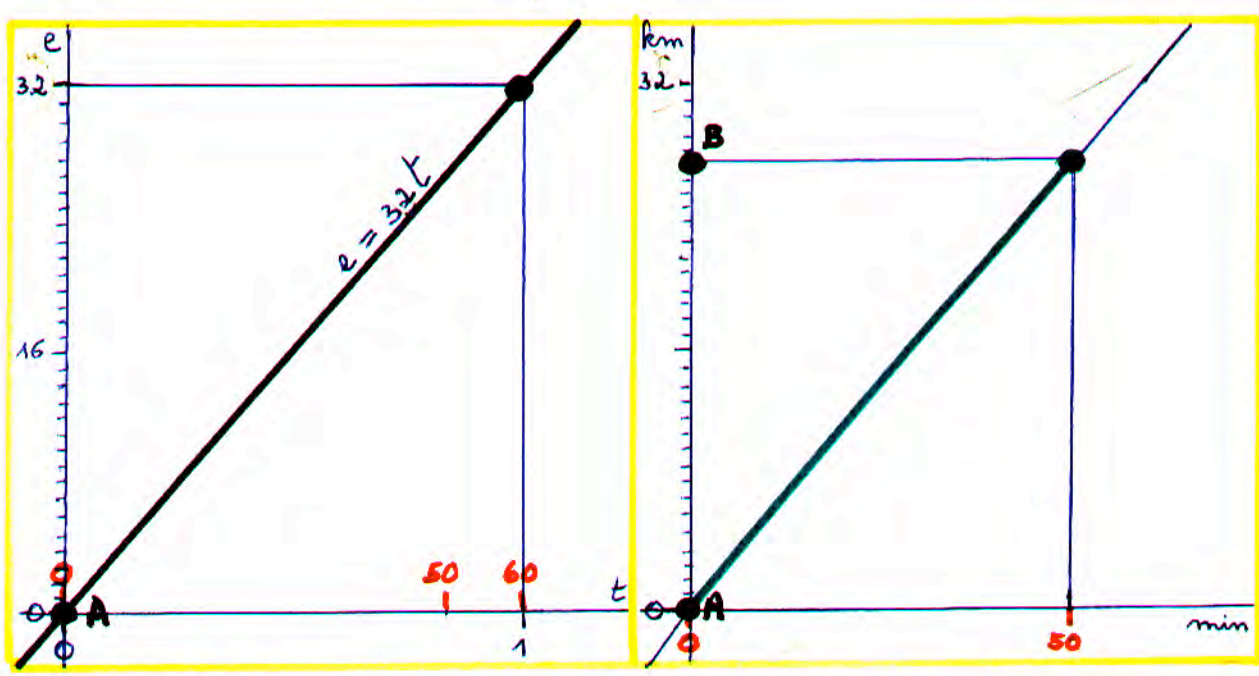
7 Mouvement à vitesse constante

- Ce cycliste met, à la vitesse constante de 32 km/heure, 50 minutes pour aller du village A au village B.



En vert, le trajet du cycliste. Celui-ci a parcouru $\left(32 \cdot \frac{50}{60}\right)$ km.

- Les unités de temps et d'espace étant fixées, un mobile qui se déplace à vitesse constante v pendant un temps t parcourt un espace $e = vt$.
  Le graphique cartésien de la fonction
  $$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto e = vt$$
  est donc une droite (v étant constant).
  Reprenons l'exemple précédent.



En vert, le graphique cartésien du déplacement du cycliste.

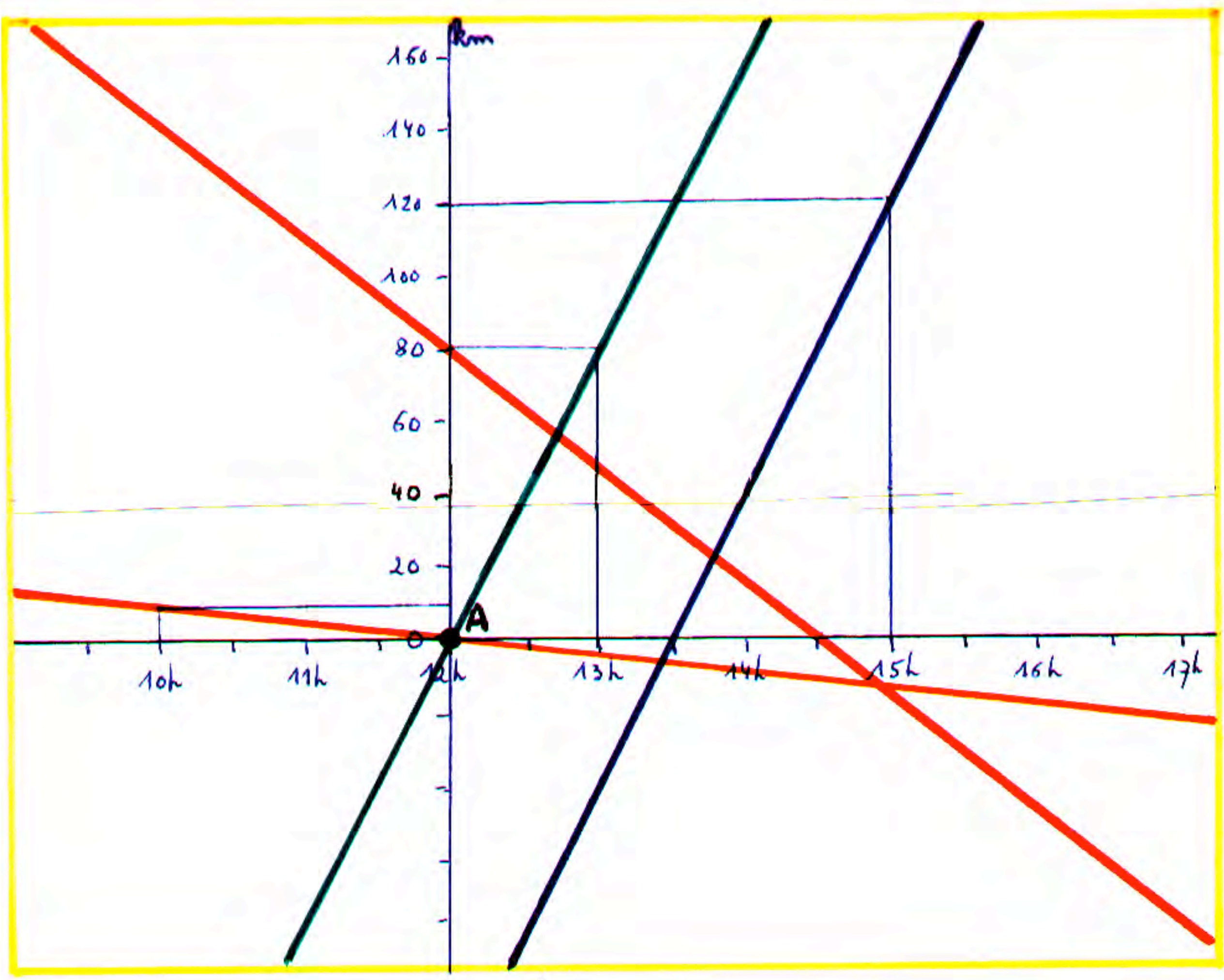
L'abscisse de B est l'espace parcouru par le cycliste.
Le village A a été pris comme origine des espaces et le moment du départ du cycliste comme origine des temps.

Sur ce même graphique tu pourras lire aisément les réponses à un grand nombre de questions : à quel moment le cycliste est-il distant de B de 10 km, ... ?

Exercices

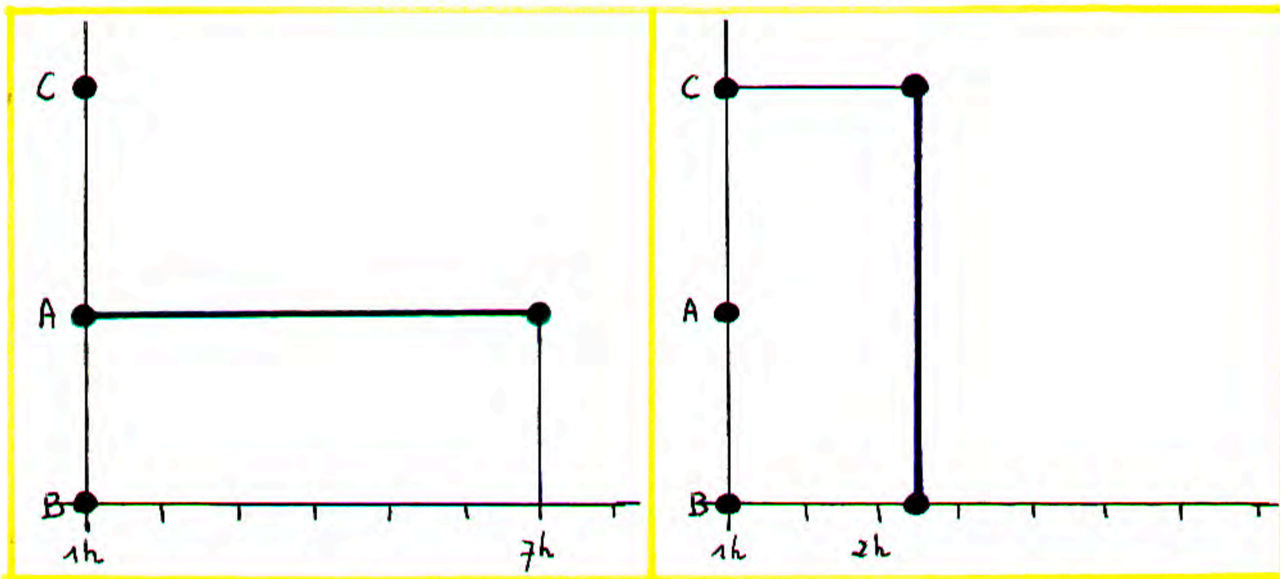
Les vitesses sont constantes (dans certains laps de temps) et positives.

1.



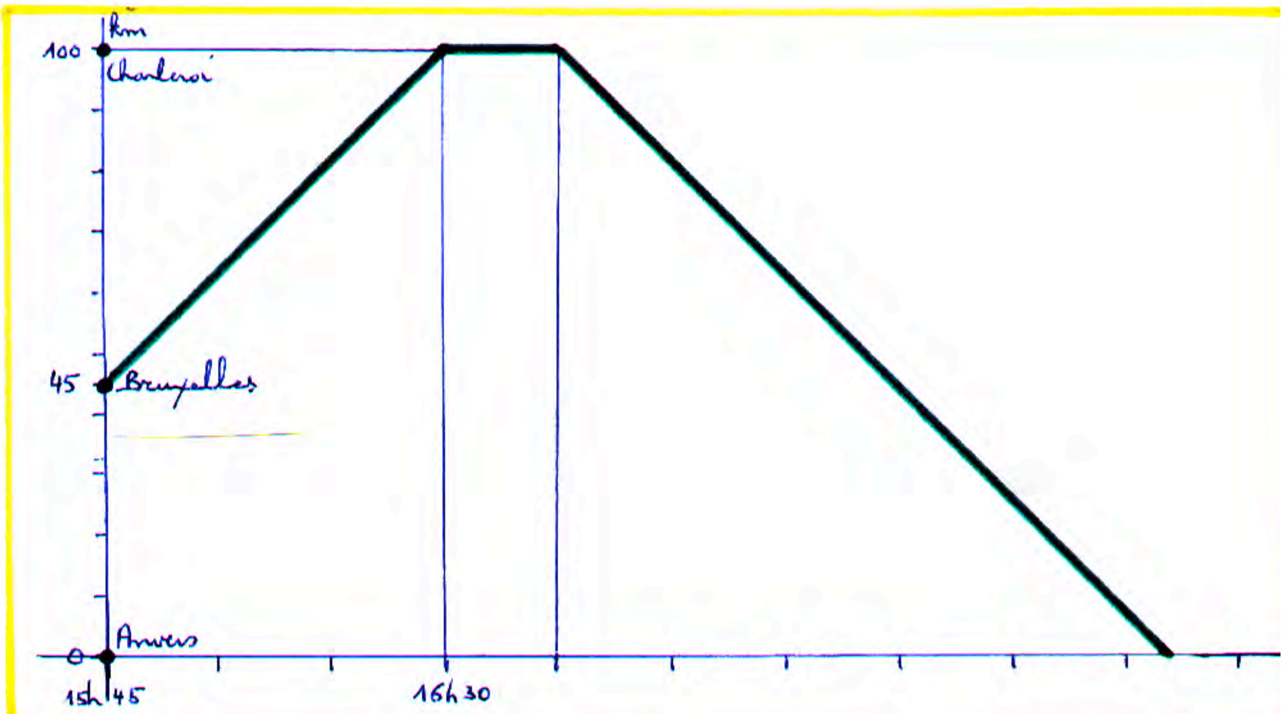
Vitesse de ces mobiles ?
Où est le mobile bleu à 14 h ? l'orange à 16 h ?
A quelle heure le vert est-il à 70 km de A ?

2



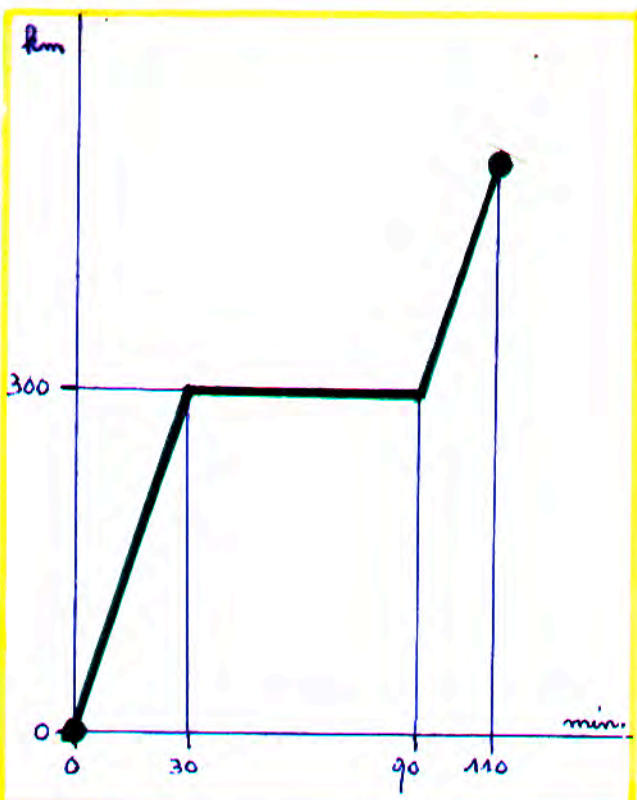
Signification de ces graphiques, en termes de mouvement ?

3 ~~2.~~



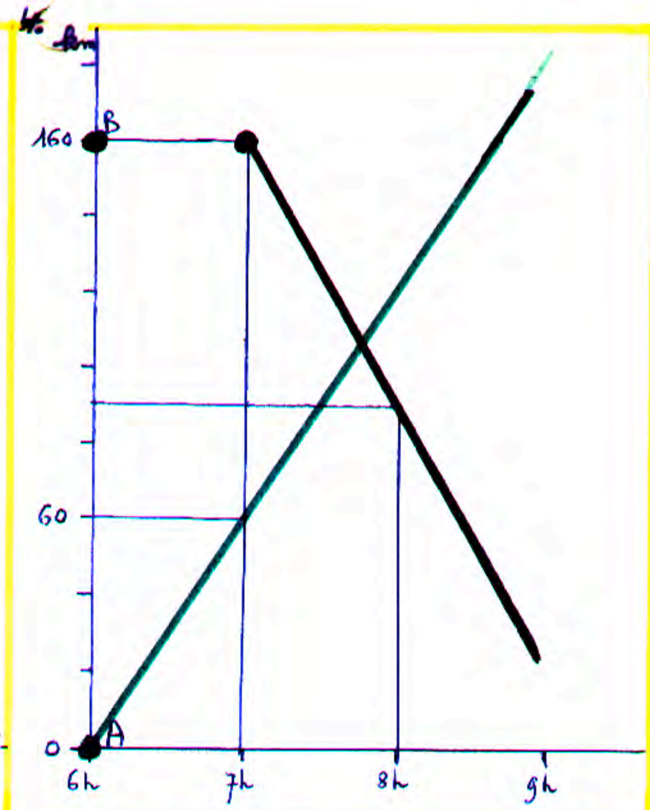
Train Bruxelles – Charleroi – Anvers. Arrêt d'un quart d'heure à Charleroi. Sa vitesse est constante ; quelle est-elle ? Heure d'arrivée à Anvers ?

4 ~~3.~~



Énonce un problème compatible avec ce graphique.

5 ~~4.~~



Où et quand ces deux automobilistes parcourant la même route AB en sens inverse se rencontrent-ils ? Quelle est leur vitesse respective ?

6. A quel moment les deux automobilistes sont-ils distants de 40 km ? (EX 5)

5. X entreprend sa marche quotidienne à 5 km/heure ; après 40 minutes il ralentit et ne fait plus que 4 km/h. Son voisin de palier Y part un quart d'heure plus tard et le suit ; il marche à la vitesse de 6 km/h. Quand rattrapera-t-il X ?

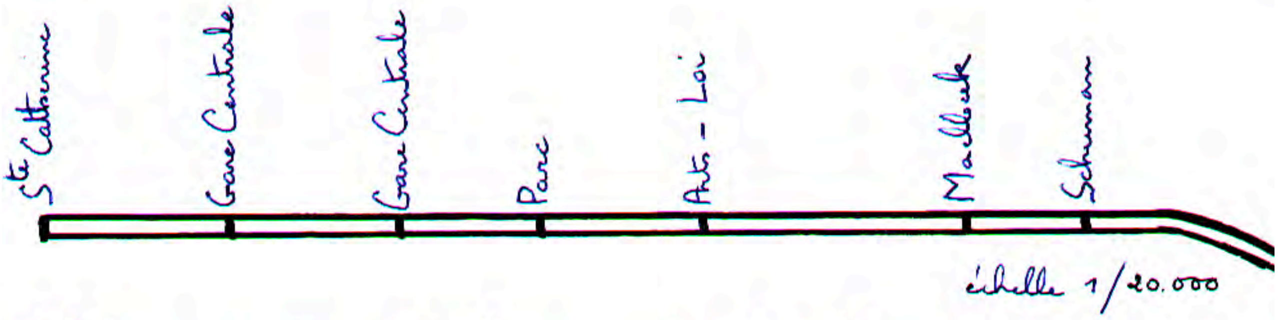
6. Cet avion Sabena quitte Bruxelles à midi et se dirige vers Athènes à la vitesse de 950 km/h. Un avion Air-France s'envole d'Athènes le même jour à 10 h. (heure locale) et se dirige vers Bruxelles à la vitesse de 900 km/h. Où et quand vont-ils se croiser ?

Autres données
- les avions suivent le même couloir aérien
- la distance Bruxelles - Athènes, suivant ce couloir, est de 2.200 km.
- l'heure grecque retarde de 2h sur celle de Bruxelles.

7. Monsieur Dubois, qui habite Liège, se rend en auto à Cologne à la vitesse de 75 km/h. Il oublie de prendre sa serviette. Son secrétaire part 20 min. plus tard et veut le rattraper au plus tard à Aix-la-Chapelle, à 45 km de Liège. Quelle est la vitesse minimum qu'il doit adopter ?

8. Une voie de chemin de fer relie les localités L et M, distantes de 28 km. Elle est dédoublée uniquement en N, à 12 km de L. Un train part de L vers M à 5h15, à 80 km/h. A quelle heure doit-on faire partir un train de M vers L, à la même vitesse, si l'on veut qu'il croise le premier train en N ?

9. Voici une partie du plan du pré-métro de Bruxelles :



Vitesse moyenne des trams : 50 km/heure

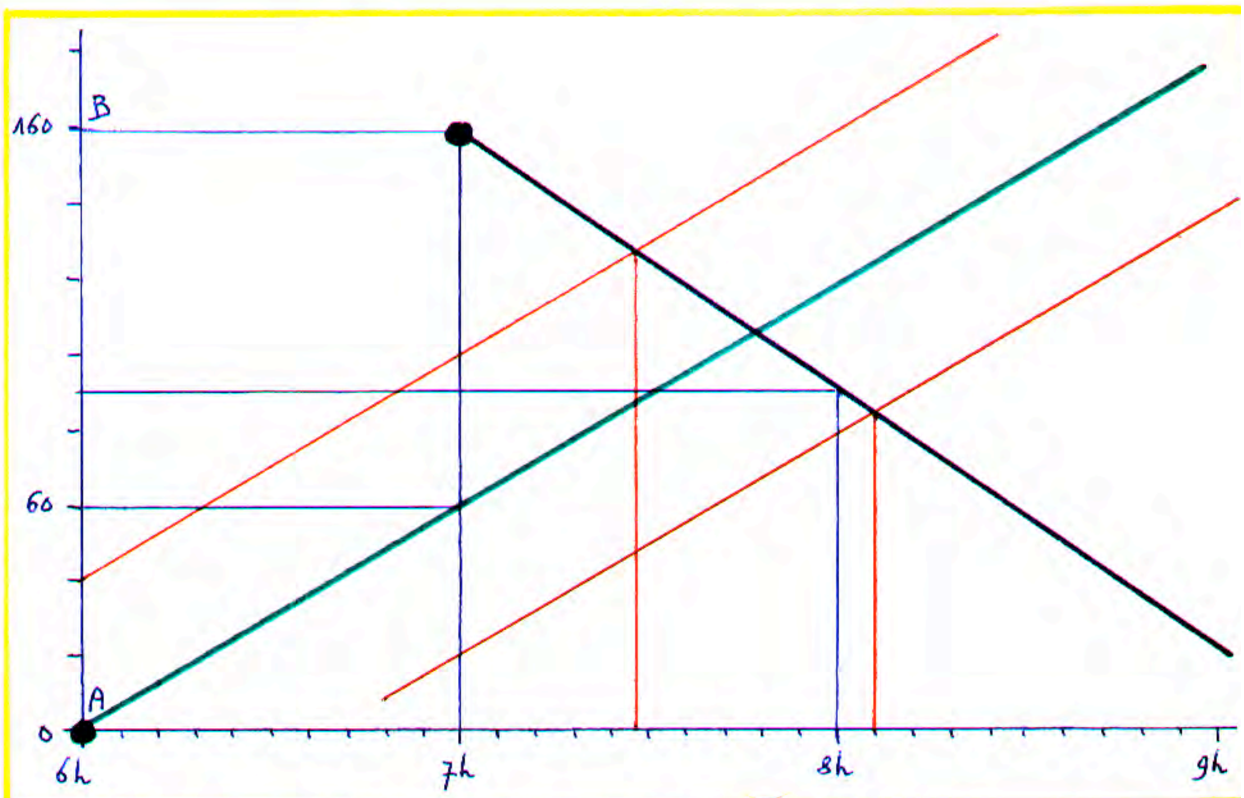
A chaque station, 10 secondes d'arrêt, sauf aux Arts : 20 secondes d'arrêt.

9.05h : départ d'un tram de Ste Catherine

9.07h : départ d'un tram de Schuman vers Ste Catherine.

Où et quand ces deux trams se croisent-ils ?

Une solution de l'EX6 :



Déchiffre ce graphique et donne des valeurs approchées des deux réponses à l'EX6.